

UE12 : Maths pour l'info

Denis Guicheteau

D'après les TD de JP Zanotti, Université de Toulon, Laboratoire Imath

```
int getRandomNumber()  
{  
    return 4; // chosen by fair dice roll.  
              // guaranteed to be random.  
}
```

[https ://xkcd.com/221/](https://xkcd.com/221/)

1er semestre - 2026

Université de Toulon

TD 01 - Logique Propositionnelle

1 Règles et table de vérité

Dans tous les TD, on s'accordera à pouvoir utiliser les symboles V et F à la place des symboles $\top$ et $\perp$.

Exercice 1.1

Chacun des énoncés suivants contient une erreur, indiquez s'il s'agit d'une erreur lexicale, syntaxique ou sémantique ?

- (a) "La saucisse a mangé le chien."
- (b) "Je n'ai rien compris à cet algorythme."
- (c) "Moi Tarzan, toi bonjour ?"
- (d) "La leçon que j'ai appris."
- (e) "La nuit il fait plus froid que dehors."

Exercice 1.2

Établissez les tables de vérité de tous les connecteurs binaires logiques suivants :

$$\wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow, \vee, \uparrow, \downarrow$$

Exercice 1.3 (🏠)

Soit P et Q deux propositions. Si la formule $P \Rightarrow Q$ est vraie, que pouvez-vous déduire sur la valeur de vérité de P , de Q ?

Si de plus P est vraie, que pouvez déduire sur la valeur de vérité de Q et réciproquement ?

Exercice 1.4

Démontrez que le connecteur $\vee$ est commutatif.

Parmi les autres connecteurs binaires, lesquels sont commutatifs ?

Exercice 1.5 (🏠)

Soit P , Q et R des variables propositionnelles.

Construisez la table de vérité du connecteur logique ternaire $\Rightarrow$ ("si/alors/sinon").

Exercice 1.6

Formalisez les énoncés suivants en logique propositionnelle :

On notera A la variable propositionnelle prenant la valeur $\top$ si "Alice est inquiète", et B celle prenant la valeur $\top$ si "Bob a déchiffré le message d'Alice".

1. Bob a déchiffré le message d'Alice ou Alice est inquiète.
2. Bob a déchiffré le message d'Alice et Alice n'est pas inquiète.
3. Bob n'a pas déchiffré le message d'Alice et Alice est inquiète.
4. Bob n'a pas déchiffré le message d'Alice ou Alice n'est pas inquiète.
5. Si Bob a déchiffré le message d'Alice alors Alice n'est pas inquiète.
6. Bob n'a pas déchiffré le message d'Alice si Alice est inquiète.

TD 02 - Logique Propositionnelle

2 Analyse de formules

Exercice 2.1

Soit P , Q et R des variables propositionnelles.

1. Dessinez l'arbre de dérivation de chacune des formules ci-dessous en rajoutant les parenthèses omises si nécessaire :

$$(a) (P \vee Q) \Rightarrow \neg(P \wedge \neg R)$$

$$(b) P \vee Q \vee \neg R.$$

$$(c) \neg(P \wedge Q) \vee \neg R$$

$$(d) (P \Rightarrow \neg R) \Leftrightarrow (\neg P \Leftrightarrow Q).$$

2. Donner l'interprétation de ces formules lorsque P et R sont faux et Q est vrai.

Exercice 2.2 (🏠)

Soit P , Q et R des variables propositionnelles. Démontrez que

$$\Rightarrow (P, Q, R) \equiv (P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge R).$$

Exercice 2.3

Soit P et Q deux propositions. Démontrez que

$$(P \vee Q) \equiv (P \vee Q) \wedge \neg(P \wedge Q) \quad (1)$$

Exercice 2.4

Soit P , Q et R trois propositions. Démontrez les deux équivalences logiques suivantes :

$$((P \wedge Q) \Rightarrow R) \equiv (P \Rightarrow (Q \Rightarrow R)) \quad (2)$$

$$(P \Leftrightarrow Q) \equiv ((P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)) \quad (3)$$

Exercice 2.5 (🏠)

Soit P et Q deux propositions. Démontrez que les connecteurs binaires $\Rightarrow$, $\uparrow$ et $\downarrow$ peuvent s'écrire uniquement avec les connecteurs $\vee$, $\wedge$ et $\neg$. Pour chacun, trouvez une équivalence logique et justifiez votre réponse avec une table de vérité si besoin.

Exercice 2.6

Un connecteur logique binaire $\diamond$ est dit *associatif* si pour toutes propositions P , Q et R on a

$$(P \diamond Q) \diamond R \equiv P \diamond (Q \diamond R) \quad (4)$$

Montrez que la conjonction, la disjonction et l'équivalence sont des connecteurs associatifs, mais pas l'implication.

TD 03 - Logique Propositionnelle

3 Propriétés

Exercice 3.1

Rappelez les deux lois de De Morgan et démontrez les.

Exercice 3.2 (🏠)

Soit P, Q et R trois variables propositionnelles et notons F la formule

$$((P \vee Q) \vee R) \Rightarrow (P \wedge Q)$$

Montrez que F est logiquement équivalente à

$$(P \vee \neg Q) \wedge (P \vee \neg R) \wedge (Q \vee \neg P) \wedge (Q \vee \neg R)$$

Exercice 3.3

Soit P, Q et R trois propositions. Démontrez les deux équivalences logiques suivantes en utilisant les propriétés des connecteurs :

$$((P \wedge Q) \Rightarrow R) \equiv (P \Rightarrow (Q \Rightarrow R)) \quad (5)$$

$$(P \Leftrightarrow Q) \stackrel{\text{def}}{\equiv} (P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P) \equiv ((P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)) \quad (6)$$

Exercice 3.4

Soit P, Q et R trois propositions. Exprimez la négation des trois propositions suivantes :

$$(1) (P \wedge Q) \vee R \quad (2) \neg P \Rightarrow Q \quad (3) P \Rightarrow (Q \Rightarrow R)$$

Exercice 3.5

Trois suspects ont été arrêtés à la suite du cambriolage de la villa de Monsieur Futay, ce sont *Bradacié*, *Piedplat* et *Nécassé*. Ils déclarent respectivement à l'inspecteur *Lafrite* qui les interroge :

(P_B) "Piedplat est coupable et Nécassé est innocent."

(P_P) "Si Bradacié est coupable, alors Nécassé l'est aussi."

(P_N) "Je suis innocent mais l'un au moins des deux autres est coupable."

C'est une nécessité pour *Lafrite* d'envisager plusieurs possibilités, c'est ce qu'il fait avant de se mettre au lit :

1. Est-il possible que mes trois lascars aient dit la vérité? Alors qui serait coupable?
2. Ils auraient pu mentir tous les trois, je suppose!?
3. Un témoignage est équivalent à une formule des deux autres. Lequel?
4. Si je suppose que tous sont innocents, qui a menti? Et si je les suppose tous coupables, qui a menti?
5. Est-il possible qu'il n'y ait qu'un seul faux témoignage? Dans ce cas, qui a menti et qui est coupable?
6. Et je garde le meilleur pour la fin...Après ceci je dormirai comme un loir : si je suppose que l'innocent dit la vérité et que le coupable ment, alors qui est innocent et qui est coupable?

Pouvez-vous aider l'inspecteur Lafrite à répondre à ces questions?

Indication : utilisez les variables B, P et N dont la valeur de vérité est associée à l'innocence du suspect correspondant. Exprimez leurs déclarations à l'aide de formules propositionnelles et construisez leurs tables de vérité.

TD 04 - Logique Propositionnelle

4 Entraînement

Exercice 4.1

1. Soient les propositions élémentaires suivantes :
 - P : Pierre aime Marie.
 - Q : Pierre veut épouser Marie.
 - (1) Écrivez la formule de la proposition « Pierre aime Marie et il veut l'épouser. »
 - (2) Si P est vraie et Q est fausse, que peut-on dire de la proposition exprimée en (1).
2. Soient les propositions élémentaires :
 - P : Marie épousera un homme beau.
 - Q : Marie épousera un homme riche.
 - (1) Écrivez la formule de la proposition « Marie épousera un homme beau ou riche. »
 - (2) Si P est fausse et Q est vraie, que peut-on dire de la proposition exprimée en (1).
3. Soient les propositions élémentaires :
 - P : Il pleut.
 - Q : Je reste à la maison.
 - (1) Écrivez la formule de la proposition « Quand il pleut, je reste à la maison. »
 - (2) Si P est fausse et Q est vraie, que peut-on dire de la proposition exprimée en (1).
4. La proposition « Quand les vaches voleront les poules auront des dents » est-elle vraie ou fausse ?
5. Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses :
 - (a) Si 16 est pair alors 7 est pair.
 - (b) Si 7 est pair alors 5 est pair.
 - (c) Si Paris est la capitale de la France alors Rome est la capitale d'Allemagne.

Exercice 4.2

Soit une formule A définie comme :

$$A = (p \vee (q \Rightarrow r)) \wedge \neg p.$$

- (1) Écrivez la formule A sous forme d'arbre de dérivation.
- (2) Écrivez la table de vérité de la formule A .

Exercice 4.3 (🏠)

Un homme qui semble divaguer déclare à toute la clientèle d'un café :

1. Le jour où je bois, je ne suis pas content et je dors.
2. Le jour où je ne mange pas, ou bien je ne suis pas content, ou bien je dors ou les deux.
3. Le jour où je mange, ou bien je suis content, ou bien je bois ou les deux.
4. Aujourd'hui, je suis content.

Questions

1. Introduire des variables propositionnelles pour représenter les propositions élémentaires et donner les formules correspondantes à chacune des propositions précédentes.
2. On considère que toutes les propositions précédentes sont vraies.
 - (a) Par raisonnement élémentaire à partir des propositions, montrer qu'il n'a pas bu.
 - (b) Répondre en les justifiant par un raisonnement élémentaire ou une table de vérité aux questions suivantes : a-t-il mangé ? a-t-il dormi ?
 - (c) Maintenant cet homme ajoute une autre proposition : « Le jour où je ne bois pas et je dors, je ne suis pas content. » Répondre à nouveau aux questions précédentes : a-t-il mangé ? a-t-il dormi ?

Exercice 4.4

Pour chacune des formules suivantes, examiner s'il s'agit d'une tautologie :

1. $p \Rightarrow (q \Rightarrow p)$.
2. $(p \Rightarrow (q \vee r)) \vee (p \Rightarrow q)$.

Exercice 4.5 (🏠)

Montrer que $P \vee Q \equiv \neg(P \Leftrightarrow Q)$

Exercice 4.6 (🏠)

1. Montrer que l'on peut écrire $\neg$, $\vee$, $\wedge$ uniquement avec $\downarrow$.
2. En déduire que l'on peut écrire tous les connecteurs avec seulement $\downarrow$

Exercice 4.7

Trouver une interprétation (s'il y en a) qui rend la formule $((p \Rightarrow q) \Rightarrow r) \Rightarrow (q \wedge \neg s)$ vraie.

Exercice 4.8 (🏠 Tiré du livre *Je ne sais pas*¹)

On sait que la phrase suivante est vraie :

”Il est faux que si la souris porte un chapeau et que la vache n’a pas de bottes alors : l’hippopotame a des lunettes ou alors la vache a des bottes mais la souris n’a pas de chapeau.”

1. La souris porte-t-elle un chapeau ?
2. La vache a-t-elle des bottes ?
3. L’hippopotame a-t-il des lunettes ?

1. Cédric Aubouy, *Je ne sais pas, ou la disparition des mathématiciens*, Pôle, 2025.

TD 05 - Ensembles et prédicats

5 Démonstrations et ensembles

Démonstrations

Exercice 5.1 (🏠 Tiré du site Maths-et-tiques)

Démontrer en utilisant les propriétés.

1. Dimanche, Jean-Pierre a joué au football toute l'après-midi. Son équipe a gagné sur le score de 3-0.

Démontrer qu'il va nettoyer les sols de la salle de bain.

2. La nuit est tombée et Valérie va se coucher. Comme elle ne trouve pas le sommeil, elle ouvre la fenêtre, branche son baladeur et écoute de la musique en observant les étoiles. Avec son casque sur les oreilles, elle ne se rend pas compte qu'elle chante très fort.

Démontrer que les poules auront des dents.

3. Nous sommes lundi, il est 10 heures et le soleil brille. Joseph est heureux, car il a bien travaillé et a reçu un 18/20 en architecture.

Démontrer qu'il va aller chez le dentiste.

Propriétés utilisables :

1. S'il fait beau, alors je pars me promener.
2. Si je suis fatigué, alors je m'endors sur mon bureau.
3. S'il fait nuit, alors les chats sont gris.
4. Si j'ai de l'argent et que je passe devant une pâtisserie, alors je m'achète des petits gâteaux au chocolat.
5. Si j'ai des caries, alors je vais chez le dentiste.
6. Si je chante à tue-tête, alors mes voisins sont contents.
7. Si je fais des mathématiques, alors c'est le bonheur absolu !
8. Si je fais du sport, alors je transpire.
9. Si je mange des sucreries, alors j'ai des caries.
10. Si je me couche tard, alors je suis fatigué.
11. Si je me douche, alors je mets de l'eau partout dans la salle de bain.
12. Si je me lave, alors je suis propre.
13. Si je mets de l'eau partout dans une pièce, alors maman me fait nettoyer les sols.
14. Si je sors de chez moi, alors je passe devant la boulangerie-pâtisserie à côté de ma maison.
15. Si je sue, alors je me lave.
16. Si des poules chantent, alors elles ont des dents qui poussent.
17. Si je travaille bien, alors je reçois de l'argent de poche.
18. Si mes voisins sont heureux et que les chats sont gris, alors les poules chantent la Marseillaise.

Exercice 5.2 (D'après l'IREM Paris-Sud)

Une réunion de cosmonautes du monde entier a lieu à Paris. Les cosmonautes américains portent tous une chemise rouge.

1. À l'aéroport, on voit quelqu'un qui porte une chemise rouge. Est-il cosmonaute américain ?
2. À côté de lui, il y a quelqu'un qui porte une chemise blanche. Est-il cosmonaute américain ?
3. Le haut-parleur annonce l'arrivée d'un cosmonaute russe. Porte-t-il une chemise rouge ?
4. Dans le hall, on voit un cosmonaute américain en manteau. Porte-t-il une chemise rouge ?

Exercice 5.3 (🏠)

On sait que la propriété suivante est vraie :

Pour tout quadrilatère Q , si Q est un losange, alors les diagonales de Q sont perpendiculaires.

R désigne un quadrilatère. Les raisonnements suivants sont-ils corrects ?

1. R a ses diagonales perpendiculaires donc R est un losange.
2. R est un losange donc les diagonales de R sont perpendiculaires.
3. Les diagonales de R ne sont pas perpendiculaires, donc R n'est pas un losange.
4. R n'est pas un losange, donc les diagonales de R ne sont pas perpendiculaires.

Exercice 5.4 (🏠)

Quatre cartes comportant un chiffre sur une face et une lettre sur l'autre sont disposées à plat sur une table. Une seule face de chaque carte est visible. Les faces visibles sont les suivantes : D, 7, 5, K.

Quelle(s) carte(s) devez-vous retourner pour déterminer la véracité de la règle suivante :

Si une carte a un D sur une face, alors elle porte un 5 sur l'autre face.

Il ne faut pas retourner de carte inutilement, ni oublier d'en retourner une.

Exercice 5.5

On dispose de trois formes en bois : un disque, un carré et un triangle.

On sait que l'une des formes est rouge, une autre bleue, et une autre jaune.

Voici trois affirmations qui concernent ces pièces :

- Si le carré est bleu, alors le disque est jaune ;
- Si le carré est jaune, alors le disque est rouge ;
- Si le disque n'est pas bleu, alors le triangle est jaune.

Quelle est la couleur de chaque pièce ?

Exercice 5.6

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer par l'absurde que $\sqrt{n^2 + 1}$ n'est pas un entier.

Exercice 5.7 (🏠)

Montrer par l'absurde qu'il n'existe pas de plus petit réel strictement positif.

Exercice 5.8 (🏠)

Soit a , b et c trois entiers relatifs. On a :

$$abc = 32, \quad a < b < c, \quad \text{et} \quad bc < 0.$$

Déterminer toutes les solutions possibles.

Ensembles**Exercice 5.9**

Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses (les objets a et b sont supposés ne pas être des ensembles) ?

$\{\emptyset\} = \emptyset,$	$\emptyset \subseteq \{\emptyset\},$	$\emptyset \in \{\emptyset\},$
$\{a, b\} = \{b, a\},$	$\{a, a, b\} = \{a, b, b\},$	$\{a, b\} \subseteq \{\{a, b\}, \{a\}, a\},$
$\{a\} \in \{a, b\},$	$a \subseteq \{a, b\},$	$\{a, b\} \in \{\{a, b\}, \{a\}, a\},$
$\{a, b\} = \{a, \{b\}\},$	$\emptyset \in \emptyset,$	$\{\emptyset, a\} \subseteq \{a\}.$

Exercice 5.10 (🏠)

Ecrire en extension les ensembles suivants :

1. L'ensemble A des nombres entiers compris entre $\sqrt{2}$ et 2π .
2. L'ensemble B qui contient les nombres rationnels x tels que x s'écrivent comme un quotient $\frac{p}{n}$ avec n et p deux entiers naturels (n non nul) et $1 \leq p \leq 2n \leq 7$
3. L'ensemble C des voyelles de l'alphabet.

Exercice 5.11

Écrivez les ensembles $\mathcal{P}(\{0\})$ et $\mathcal{P}(\{a, b\})$ en extension, où $\mathcal{P}(E)$ désigne l'ensemble des parties de E .

TD 06 - Ensembles et prédicats

6 Prédicats et quantificateurs

Prédicats et quantificateurs

Exercice 6.1

Indiquez si les énoncés suivants sont des propositions ou des prédicats et dans ce dernier cas précisez la ou les variable(s) libre(s).

$$\exists y \in \mathbb{R} \quad x^2 - y = \sqrt{2},$$

$$\exists y \in \mathbb{R} \quad (0 < x \leq y),$$

$$\forall x \in \mathbb{Z} \quad x(x-1) = 2y,$$

$$\forall n \in \mathbb{Z} \exists k \in \mathbb{Z} \quad (n = 2k) \vee (n = 2k + 1),$$

$$\exists k \in \mathbb{Z} \quad x + y = k,$$

$$\exists (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \quad x^2 - y^2 = 2.$$

Exercice 6.2

Soit X et Y deux ensembles, $P(x)$, $Q(x)$ et $R(x)$ des prédicats. Écrivez la négation des propositions suivantes :

1. $\forall x \in X \quad P(x) \Rightarrow Q(x)$
2. $\exists x \in X \quad P(x) \Rightarrow Q(x)$
3. $\exists x \in X \quad P(x) \Leftrightarrow Q(x)$
4. $\forall x \in X \quad \neg P(x) \wedge Q(x)$
5. $\forall x \in X \quad P(x) \vee \neg Q(x)$
6. $\exists x \in X \quad \neg P(x) \vee Q(x)$
7. (🏠) $\forall x \in X \exists y \in Y \quad P(x) \Rightarrow (\neg Q(x) \wedge R(y))$
8. (🏠) $\exists x \in X \forall y \in Y \quad P(x) \vee \neg Q(x, y)$

Exercice 6.3 (🏠)

Traduisez la proposition suivante sans utiliser le quantificateur existentiel $\exists!$:

$$\exists! k \in \mathbb{N}, P(k)$$

Exercice 6.4 (🏠)

Pour chaque proposition :

- Définir les ensembles étudiés.
 - Définir les prédicats mis en jeu.
 - Utiliser les bons quantificateurs pour formaliser la proposition en logique des prédicats.
 - Ecrire la négation de cette proposition.
1. Tout étudiant habitant à Hyères et mesurant moins de 1,70 m aura deux enfants ou prendra sa retraite avant l'âge de 50 ans.
 2. Tout triangle rectangle possède un angle droit.
 3. Dans toute licence d'informatique, il existe des étudiants qui sont bons en mathématiques.

Démonstrations

Exercice 6.5

Vrai ou Faux — Justifier.

Soit $P(n)$ une propriété dépendant d'un entier naturel n .

1. Si une propriété est héréditaire, alors elle est vraie pour tout entier naturel.
2. Si une propriété est vraie au rang 0 et est héréditaire, alors elle est vraie pour tout entier naturel.
3. Si une propriété est vraie au rang 1 et est héréditaire, alors elle est vraie pour tout entier naturel.
4. Si une propriété est vraie aux rangs 0 et 1, alors elle est héréditaire.
5. Si une propriété est vraie au rang 3 et héréditaire à partir de 3, alors elle est vraie pour tout entier naturel supérieur ou égal à 3.

6. Si une propriété est vraie au rang 3 et héréditaire à partir de 3, alors elle est vraie pour tout entier naturel supérieur ou égal à 5.
7. Si une propriété est vraie au rang 5 et héréditaire à partir de 3, alors elle est vraie pour tout entier naturel supérieur ou égal à 3.
8. Si une propriété est vraie au rang n_0 et héréditaire à partir de n_0 , alors elle est vraie pour tout entier naturel $n \geq n_0$.

Exercice 6.6 (🏠)

1. (a) Démontrer que : Si deux nombres sont multiples de 37, alors leur somme est multiple de 37.
(b) La réciproque est-elle vraie ?
2. Vrai ou Faux ? A vous de le démontrer.

$\forall a \in \mathbb{R}^+, \forall b \in \mathbb{R}^+$ on a :

- (a) $\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$
- (b) $\sqrt{a + b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$
- (c) $\sqrt{a - b} = \sqrt{a} - \sqrt{b}$

Exercice 6.7

1. Démontrer que pour $n \in \mathbb{N}$ le prédicat $P(n)$: "6 divise $7^n + 1$ " est héréditaire.
2. Montrer que la propriété : $\forall n \in \mathbb{N}, P(n)$ est fausse.

Exercice 6.8 (🏠)

Soit (u_n) la suite définie par :

$$u_0 = 5 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 3u_n + 8.$$

Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , on a :

$$u_n = 9 \times 3^n - 4.$$

TD 07 - Ensembles et prédicats

7 Ensembles et graphes

Opérations sur les ensembles

Exercice 7.1

On considère les ensembles :

$$A = \{3, 4, 5, 7, 9, 17\}, \quad B = \{0, 3, 4, 8, 9, 10\}, \quad C = \{0, 3, 4, 7, 10, 13\}.$$

1. Représenter ces ensembles dans un diagramme de Venn.
2. Déterminer les ensembles suivants :
 - (a) $A \cap B$, $B \cap C$, $A \cap C$.
 - (b) $A \cup B$, $B \cup C$, $A \cup C$.
 - (c) $A \setminus C$, $B \setminus A$, $(A \cap B) \cap C$.
 - (d) $A \cap (B \cap C)$, $A \setminus (B \cup C)$, $B \setminus (A \cup C)$.
 - (e) $A \cup (B \cap C)$, $A \cup (B \cap C)$, $(A \cup B) \cap (A \cup C)$.
 - (f) Déterminer les ensembles

$$D = \{x \mid x \in A, x \in B, x \notin C\} \quad \text{et} \quad E = \{x \mid x \notin A, x \notin B, x \in C\}.$$

Exercice 7.2 (🏠)

1. Ecrire de manière formalisée que la réunion ensembliste est distributive sur l'intersection.
2. En utilisant la distributivité de $\vee$ sur $\wedge$, démontrer que la réunion ensembliste est distributive sur l'intersection.

Exercice 7.3

Soit X et Y deux ensembles. Démontrez que

$$(X \cap Y = X \cup Y) \Rightarrow X = Y.$$

Exercice 7.4 (🏠)

Soit X et Y deux ensembles. Démontrez les équivalences :

$$X \cup Y = Y \iff X \subseteq Y. \tag{7}$$

$$X \cap Y = Y \iff Y \subseteq X. \tag{8}$$

Exercice 7.5 (🏠)

Soient A , B et C trois parties d'un ensemble E . Pour $X \subseteq E$, on note X^c le complémentaire de X dans E .

Démontrer les égalités suivantes :

1. $(A^c)^c = A$;
2. $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$;
3. $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$.

Exercice 7.6

Soit A une partie d'un ensemble E . On appelle *fonction caractéristique* de A l'application f de E dans $\{0, 1\}$ définie par :

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A, \\ 0 & \text{si } x \notin A. \end{cases}$$

Soient A et B deux parties de E , et soient f et g leurs fonctions caractéristiques. Montrer que les fonctions suivantes sont les fonctions caractéristiques d'ensembles que l'on déterminera :

1. $1 - f$;
2. fg ;
3. $f + g - fg$.

Exercice 7.7

Dans chacun des cas suivants, écrire la correspondance en extension (c'est-à-dire donner explicitement l'ensemble de départ, l'ensemble d'arrivée et l'ensemble des couples associés), puis représenter la correspondance par un diagramme sagittal.

1. À chaque entier naturel compris entre 2 et 12 inclus, on associe l'ensemble de ses diviseurs propres (différents de 1 et de lui-même).
2. Dans le mot « mathématiques », on associe à chaque lettre la lettre qui la suit ou qui la précède immédiatement.
3. À chaque entier naturel compris entre 1 et 4 inclus, on associe son image par la fonction

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 2x + 1}}.$$

TD 08 - Ensembles et prédicats

8 Entraînement

Exercice 8.1

Soient les propositions suivantes :

- (a) Tout nombre réel a un carré non négatif.
- (b) Il existe au moins un nombre réel dont le carré est non négatif.
- (c) Toute somme de deux nombres réels a pour carré la somme des carrés de ces deux nombres.
- (d) Il existe deux nombres réels dont la somme a pour carré la somme des carrés de ces deux nombres.

On se donne l'ensemble $\mathbb{R}$ des réels comme domaine d'interprétation, avec les opérations arithmétiques usuelles.

1. Écrire ces propositions en logique des prédicats.
2. Évaluer leur valeur de vérité.
3. Écrire leurs négations.

Indication : comme le domaine d'interprétation est précisé, il n'est pas nécessaire d'écrire que les variables appartiennent à $\mathbb{R}$.

Exercice 8.2 (🏠)

Soit un langage des prédicats avec un prédicat binaire p et une fonction unaire f , et les trois formules suivantes :

- (a) $F_1 = \forall x \forall y (p(x, y) \Rightarrow p(x, f(y)))$
- (b) $F_2 = \forall x \forall y (p(x, y) \Rightarrow \neg p(y, x))$
- (c) $F_3 = \forall x \forall y \forall z ((p(x, y) \wedge p(y, z)) \Rightarrow p(x, z))$

On se donne l'interprétation suivante :

- Domaine d'interprétation : l'ensemble des êtres humains ;
- $p(x, y)$: « x est père de y » ;
- $f(x)$: « le frère de x ».

1. Traduire F_1 , F_2 et F_3 en langage naturel.
2. Dire si F_1 , F_2 et F_3 sont vraies, en justifiant.

Exercice 8.3 (🏠)

Soit l'opérateur $\oplus$ (ou exclusif) défini sur deux variables propositionnelles.

On définit récursivement, pour $n \geq 2$,

$$A_1 \oplus A_2 \oplus \cdots \oplus A_n = (A_1 \oplus A_2 \oplus \cdots \oplus A_{n-1}) \oplus A_n.$$

1. Montrer par récurrence sur n que la formule

$$A_1 \oplus A_2 \oplus \cdots \oplus A_n$$

est vraie si et seulement si un nombre impair des A_i sont vrais, et vaut faux si et seulement si un nombre pair des A_i valent vrai.

2. En déduire que, si les A_i sont des propositions atomiques deux à deux distinctes, alors la formule

$$A_1 \oplus A_2 \oplus \cdots \oplus A_n$$

est vraie pour exactement la moitié des interprétations possibles.

Exercice 8.4

On considère trois ensembles A , B et C inclus dans l'ensemble

$$E = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}.$$

On sait que :

- $A \cap C = \{1, 4, 5\}$,
- $B \setminus A = \{0, 3, 6\}$,
- $A \cup B \cup C = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$,
- $A \cap B = \{2, 4, 5, 7\}$,
- $C \setminus A = \{0, 8\}$,
- $A \cap B \cap C = \{4, 5\}$.

Disposer les éléments de E dans les différentes régions du diagramme de Venn associé aux ensembles A , B et C .

Exercice 8.5

On considère la correspondance c dont le diagramme sagittal est représenté en figure (1).

1. Écrivez l'ensemble de départ, d'arrivée et le graphe de c en extension.
2. Dessinez le diagramme sagittal de la correspondance réciproque.

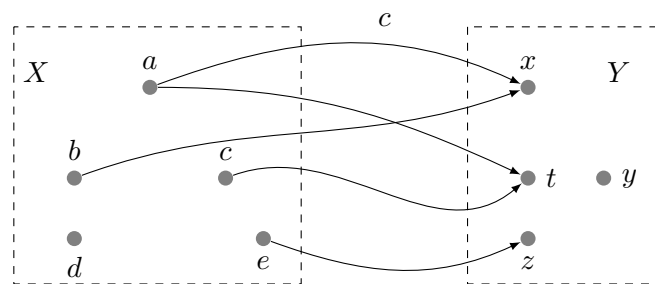


FIGURE 1 – Diagramme sagittal de la correspondance c

TD 09 - Calculs booléens

9 Algèbre booléen

Exercice 9.1

Écrivez la négation des expressions booléennes suivantes :

1. $\bar{x}\bar{y} + xy + \bar{x}y$
2. $x(\bar{y}\bar{z} + yz) + \bar{x}y\bar{z} + \bar{x}z$
3. $x\bar{y} + t\bar{z} + xy + \bar{t}z$
4. $(x + y)(\bar{x} + z)$
5. $(\bar{x}\bar{z} + y\bar{z})(x + y\bar{z})$

Exercice 9.2 (🏠)

Démontrez que l'opérateur binaire *non et*, dit d'*incompatibilité*, noté $\uparrow$ et défini par

$$x \uparrow y = \overline{(x.y)}$$

est un *opérateur universel*, c'est-à-dire que l'on peut définir les trois opérateurs *non*, *ou* et *et* par des combinaisons de cet opérateur.

Indication : vérifiez que $\bar{x} = x \uparrow x$.

Montrez que l'opérateur *non ou* $\downarrow$ est lui aussi universel.

Exercice 9.3

Démontrez les propriétés de *redondance* et de *simplification* puis écrivez leurs duales :

1. $\forall (a, x, y) \in \mathcal{B}^3, \quad ax + \bar{a}y = ax + \bar{a}y + xy.$
2. $\forall (a, b) \in \mathcal{B}^2, \quad a + \bar{a}b = a + b.$

Exercice 9.4

Soient a, b, c, d quatre variables booléennes. Simplifier si possible :

1. $(ab + c + d)ab$
2. $(\bar{b} + \bar{a})(ac + \bar{b})$
3. $c(b + c) + (a + d)(\bar{a} + d)\bar{c}$
4. $ac(\bar{a} + b + \bar{c})$

Exercice 9.5 (🏠)

On considère les connecteurs logiques $\oplus, \Rightarrow, \Leftrightarrow, \uparrow, \downarrow$ et $\Rightarrow$ (opérateur SI ALORS SINON).

1. Définissez les fonctions booléennes associées à chacun de ces connecteurs à l'aide des opérations d'addition, de multiplication et de négation de l'algèbre de Boole.
2. Écrivez une fonction *Python* qui code la fonction booléenne associée à l'opérateur $\Rightarrow$.

Exercice 9.6 (🏠)

Soit x, y, z et t quatre variables booléennes. Vérifiez les égalités suivantes :

1. $xy + xzt + \bar{y}t = xy + \bar{y}t$
2. $(\bar{x} + y)(x + z)(y + z) = (\bar{x} + y)(x + z)$
3. $xy + \bar{y}z = (x + \bar{y})(y + z)$
4. $\overline{x\bar{y} + \bar{x}y} = xy + \bar{x}\bar{y}$
5. $\overline{(x + y)(\bar{x} + z)} = (x + \bar{y})(\bar{x} + \bar{z})$

TD 10 - Calculs booléens

10 Fonctions booléennes

Exercice 10.1

Simplifiez les fonctions booléennes suivantes puis calculez leurs formes duales :

1. $f(x, y) := \bar{x}(y + 1) + y$
2. $f(x, y, z) := (1 + x)(x\bar{y} + z)$
3. $f(x, y, z) := x(\bar{y} + 1) + \bar{x}z$
4. $f(x, y, z) := (1 + xy)z + x$

Exercice 10.2

Quelles sont les formes normales canoniques conjonctives et disjonctives des fonctions suivantes ?

1. $f_1(x, y) := \bar{x} + xy$
2. $f_2(x, y, z) := \bar{x} + x(y + \bar{z})$
3. $f_3(x, y) := x$
4. $f_4(x) := 1$

Exercice 10.3 (🏠)

Quelles sont les formes normales canoniques conjonctives et disjonctives des fonctions suivantes ?

1. $f_1(x, y) = x\bar{y} + \bar{x}$
2. $f_2(x, y, z) = (x + y)\bar{z} + x\bar{y}$
3. $f_3(x, y, z) = \bar{x}y + yz$
4. $f_4(x, y) = (x + \bar{y})(\bar{x} + y)$

Exercice 10.4 (🏠)

Simplifier les expressions S_1 , S_2 , S_3 et S_4 en utilisant les propriétés de l'algèbre de Boole.

1. $S_1(a, b) = \bar{a}b + a\bar{b} + ab$
2. $S_2(a, b, c) = b + ab + bc + c$
3. $S_3(a, b, c) = (b + \bar{b}a)c + ab\bar{c}$
4. $S_4(a, b, c) = (a + c)(a + \bar{b})(a + \bar{c})$

Exercice 10.5 1. Écrire sous FND canonique les fonctions définies par les propositions suivantes :

- $f(a, b, c) = 1$ si et seulement si exactement deux des variables a, b, c valent 1
- $f(a, b, c) = 1$ si et seulement si les variables a, b, c valent toutes 1
- $f(a, b, c) = a + bc$

2. Écrire sous FNC canonique les fonctions définies par les propositions suivantes :

- $f(a, b, c) = 0$ si et seulement si exactement une des variables a, b, c vaut 1
- $f(a, b, c) = 0$ si et seulement si au moins deux des variables a, b, c valent 0
- $f(a, b, c) = c(b + a + c)$

TD 11 - Calculs booléens

11 Portes logiques et simplification

Exercice 11.1

Simplifiez si possible les fonctions booléennes suivantes puis dessinez les circuits logiques qui les réalisent :

1. $f_1(x, y) := (\bar{x} + \bar{y})x + x\bar{y}$
2. $f_2(x, y, z) := z(\bar{x} + \bar{y})x + x\bar{z}y$
3. $f_3(x, y, z) := (x + \bar{y} + z)\bar{x}$

Exercice 11.2

On considère la fonction booléenne f de 4 variables x, y, z et t dont la table de Karnaugh est présentée en table (1).

$xy \backslash zt$	00	01	11	10
00			1	1
01			1	1
11	1	1	1	1
10			1	1

TABLE 1 – Table de Karnaugh.

1. Donnez la forme normale disjonctive canonique de la fonction f .
2. Donnez la forme normale conjonctive canonique de la fonction f .
3. Simplifiez l'expression de la fonction f .
4. Dessinez le circuit logique correspondant avec les trois portes usuelles.

Exercice 11.3

On considère le circuit électrique suivant comportant plusieurs interrupteurs. Les conventions sont les suivantes : un interrupteur σ est modélisé par un booléen dont les valeurs codent deux états :

- *ouvert* quand $\sigma = 0$: il ne laisse pas circuler le courant.
- *fermé* quand $\sigma = 1$: il laisse circuler le courant.

Quand deux interrupteurs sont dénotés par le même littéral, ils sont dans le même état, si les littéraux sont opposés, ils sont dans l'état opposé. On suppose que l'entrée E est alimentée (cf. figure 2).

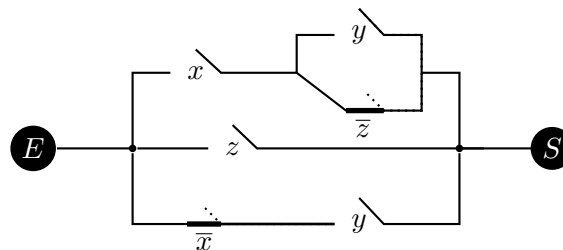


FIGURE 2 – Circuit électrique.

1. Écrivez la fonction booléenne $S(x, y, z)$ qui modélise s'il y a du courant ou pas en sortie S du circuit. On supposera que la valeur 1 indique la présence du courant.
2. Simplifiez cette fonction et dessinez son circuit logique simplifié.
3. Calculez sa table de vérité.
4. Calculez les formes normales canoniques de S .

Exercice 11.4 (🏠)

Dans chacun des cas, faire une table de Karnaugh et simplifier l'expression :

1. $s(a, b, c, d) = \bar{a}\bar{b}\bar{c}\bar{d} + abcd + \bar{a}\bar{b}cd + ab\bar{c}\bar{d}$
2. $f(a, b, c, d) = \bar{a}\bar{b}\bar{c}\bar{d} + \bar{a}\bar{b}\bar{c}d + \bar{a}\bar{b}cd + \bar{a}\bar{b}c\bar{d}$

TD 12 - Calculs booléens

12 Entraînement

Exercice 12.1

Soient les fonctions booléennes suivantes :

- $f_1(a, b, c) = ab + \bar{c}$
- $f_2(a, b, c) = (a + bc)(\bar{a}b + c)$

En utilisant les théorèmes de De Morgan :

1. Donner les expressions des fonctions $\overline{f_1}$ et $\overline{f_2}$:
2. Exprimer la négation de la fonction suivante :

$$f_3(a, b, c) = \bar{a}\bar{c}\bar{d} + ad + \bar{a}bc + \bar{a}\bar{b}\bar{c}$$

Exercice 12.2

Donner la forme normale disjonctive canonique de la fonction suivante en utilisant la table de vérité :

$$f_1(a, b, c) = (\bar{a} + \bar{b})(b + \bar{c})$$

Exercice 12.3

On dispose d'un disque rotatif codant 8 directions, Nord, Nord-Ouest, Ouest, Sud-Ouest, Sud, Sud-Est, Est, Nord-Est à l'aide d'un code de Gray de dimension 3. Par convention on suppose que le triplet nul (0, 0, 0) code le Nord.

Soit f la fonction booléenne à trois variables x, y et z qui vaut 1 quand la direction est le Nord, le Sud-Ouest ou le Sud-Est (x désigne le bit de poids fort du code et z le bit de poids faible).

1. Construisez la table de Karnaugh de cette fonction et écrivez la forme normale disjonctive canonique de cette fonction.
2. Simplifiez la fonction et élaborer un circuit logique pour la boussole qui allume une diode si la direction est le Nord, le Sud-Ouest ou le Sud-Est.

Exercice 12.4 1. Montrer qu'il existe une unique fonction booléenne φ d'arité 3 telle que, pour tout $t \in \{0, 1\}$, on ait :

$$\begin{cases} \varphi(t, \bar{t}, t) = \varphi(t, 0, 0) = 1, \\ \varphi(t, t, \bar{t}) = \varphi(t, 1, 1) = 0. \end{cases}$$

2. Donner une forme normale disjonctive (FND) aussi réduite que possible de la fonction φ .
3. Donner un exemple de fonction booléenne g à une variable telle que, quelle que soit la fonction booléenne f , on ait :

$$\forall x \in \{0, 1\}, \quad g(f(x)) = \varphi(f(x), f(x), f(x)).$$

TD 13 - Applications et relations

13 Applications

Exercice 13.1

Considérons les trois ensembles

$$C := \{R, V, B\}, \quad V := \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}, \quad G := \{(R, 2), (V, 5), (B, 7)\}.$$

1. Comment qualifie-t-on les éléments de G ?
2. De quel ensemble G est-il un sous-ensemble ?
3. Dessinez le diagramme sagittal de la correspondance $c := (C, G, V)$.
4. Est-ce une fonction, une application ?

Exercice 13.2

Soit $X := \{x, y, z\}$ et $f : X^2 \rightarrow \mathcal{P}(X)$ l'application définie par $f((a, b)) := \{a, b\}$.

1. Ecrire par extension les ensembles $X \times X$ et $\mathcal{P}(X)$.
2. Calculez l'image de (x, x)
3. Calculez l'image réciproque de X .
4. Dessinez le diagramme sagittal de cette application.
5. (🏠) Dans le cas où X est un ensemble quelconque, cette application est-elle injective ? Surjective ? Justifiez votre réponse.

Exercice 13.3

Soit f et g les deux applications définies par les diagrammes sagittaux de la figure 3.

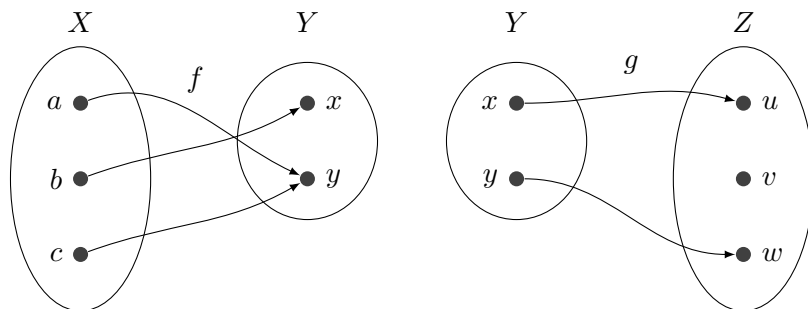


FIGURE 3 – Diagrammes sagittaux des applications f et g .

1. Écrivez les graphes G_f et G_g des deux applications f et g respectivement en extension.
2. Ces applications sont-elles injectives, surjectives, bijectives ?
3. Dessinez le diagramme sagittal de la composition $g \circ f$ de ces deux applications et écrivez son graphe $G_{g \circ f}$ en extension.
4. L'application $g \circ f$ est-elle injective, surjective, bijective ?
5. La correspondance réciproque de $g \circ f$ est-elle une fonction ? Une application ?

Exercice 13.4 (🏠)

Soit X l'ensemble des étudiants qui suivent l'UE12 et $\mathcal{A} := \{a, b, \dots, z\}$ l'alphabet latin. L'application $f : X \rightarrow \mathcal{A}$ qui à tout étudiant associe la première lettre de son nom de famille est-elle injective ?

Exercice 13.5 (🏠)

Les fonctions trigonométriques sinus, cosinus et tangente de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ sont-elles des applications ? Si oui sont-elles injectives, surjectives, bijectives ? Quels ensembles de départ et/ou d'arrivée considérer pour qu'elles vérifient ces propriétés ?

Exercice 13.6

Soit E un ensemble non-vidé et A une partie de E telle que $A \neq \emptyset$ et $A \neq E$. Soit f et g deux applications de $\mathcal{P}(E)$ dans $\mathcal{P}(E)$ définies par

$$f(X) := X \cup A, \quad g(X) = X \cap A.$$

Ces applications sont-elles injectives, surjectives, bijectives ? (Ne pas hésiter à faire un diagramme de Venn pour vous aider)

Exercice 13.7 (🏠)

Soit A et B deux parties non-vides d'un ensemble E non-vidé. On définit $f : \mathcal{P}(E) \rightarrow \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$ par $f(X) := (X \cap A, X \cap B)$.

1. Démontrez que f est injective si et seulement si $A \cup B = E$.
2. Démontrez que f est surjective si et seulement si $A \cap B = \emptyset$.

Exercice 13.8 (🏠)

La fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $x \mapsto x^2$ est-elle une application ? Si oui, est-elle injective, surjective ? Sa correspondance réciproque est-elle une fonction ?

TD 14 - Applications et relations

14 Relations binaires

Exercice 14.1

Soit $\mathcal{B} := \{0, 1\}$ muni de sa structure d'algèbre de Boole. Soit X un ensemble quelconque et A et B deux parties de X . On définit la *fonction indicatrice* de A notée $\mathbb{1}_A : X \rightarrow \mathcal{B}$ par

$$\mathbb{1}_A(x) := \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Que peut-on dire des ensembles A et B si $\mathbb{1}_A = \mathbb{1}_B$?
2. Exprimez la fonction indicatrice du complémentaire de A dans X , de $A \cap B$, de $A \cup B$ et de $A \triangle B (= (A \cup B) \setminus (A \cap B))$ à l'aide des fonctions indicatrices de A et B .
3. Soit $f : X \rightarrow Y$ et C une partie de Y . De quel ensemble la fonction $\mathbb{1}_C \circ f$ est-elle la fonction indicatrice ?
4. (🏠) Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ et $(X_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ une partition de X . Montrez que

$$\sum_{i=1}^n \mathbb{1}_{X_i} = \mathbb{1}_X.$$

Exercice 14.2 (🏠)

Écrivez la négation logique de chacune des propriétés remarquables du graphe d'une relation binaire sur un ensemble (réflexif, symétrique, transitif).

Exercice 14.3

Parmi les propriétés remarquables d'une relation binaire, lesquelles sont satisfaites par la relation de parallélisme $\parallel$ des droites du plan réel ? Par la relation d'orthogonalité $\perp$ des droites du plan réel ?

Exercice 14.4

Dire si les relations suivantes sont réflexives, symétriques, antisymétriques, transitives :

1. $E = \mathbb{Z}$ et $x \mathcal{R} y \Leftrightarrow x = -y$
2. (🏠) $E = \mathbb{N}$ et $x \mathcal{R} y \Leftrightarrow \exists p, q \geq 1, y = px^q$

TD 15 - Applications et relations

15 Relations d'ordre et d'équivalence

Exercice 15.1

Soit $E = \{1, 2, 3, 4\}$ et $\mathcal{R}$ la relation binaire sur E dont le graphe est

$$\Gamma = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 3), (3, 4), (4, 3), (4, 4)\}.$$

1. Quelles sont les propriétés vérifiées par cette relation ?
2. Faire la liste des classes d'équivalence distinctes et donner l'ensemble quotient.

Exercice 15.2

Montrez que la relation binaire définie sur $\mathbb{R}$ par $x \mathcal{R} y \Leftrightarrow \cos^2 x + \sin^2 y = 1$ est une relation d'équivalence.

Exercice 15.3

Démontrez que la relation binaire d'inclusion $\subseteq$ définie sur l'ensemble $\mathcal{P}(X)$ des parties d'un ensemble X est une relation d'ordre. Est-ce un ordre total ou partiel ?

Exercice 15.4

On définit la relation de divisibilité $|$ sur l'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N}$ par

$$a | b \iff \exists c \in \mathbb{N} \quad ac = b.$$

1. Démontrez qu'il s'agit d'une relation d'ordre partiel.
2. Vérifiez que 0 est le plus grand élément pour cette relation.
3. Existe-t-il un plus petit élément ?

On restreint à présent cette relation à l'ensemble $\mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$.

4. Existe-t-il un plus petit élément ? Un plus grand élément ?
5. Quels sont alors les éléments minimaux, maximaux s'il en existe ?
6. Tracez le diagramme de Hasse de la relation de divisibilité restreinte à l'ensemble $\llbracket 1, 15 \rrbracket$.

Exercice 15.5 (🏠)

Déterminer les bornes supérieures et inférieures des parties suivantes de $\mathbb{R}$.

$$A = \left\{ \sqrt{\frac{n}{n+1}} \mid n \in \mathbb{N} \right\} \quad B = \{x^2 + 2x + 3 \mid x \in [-3, 2]\} \quad C = \left\{ \frac{1}{n} + (-1)^n \mid n \in \mathbb{N}^* \right\}$$

TD 16 - Applications et relations

16 Entraînement

Exercice 16.1

Soit $A = \{a, b, \dots, z\}$ l'ensemble des lettres de l'alphabet latin et $\mathcal{B} = \{0, 1\}$ l'ensemble des booléens. On considère

$$V : A \rightarrow \mathcal{B}$$

l'application définie par

$$V(\ell) = \begin{cases} 1 & \text{si } \ell \text{ est une voyelle,} \\ 0 & \text{si } \ell \text{ est une consonne.} \end{cases}$$

1. L'application V est-elle injective, surjective, bijective ?
2. Calculez les ensembles

$$C := V^{-1}(\{0\}) \quad \text{et} \quad D := V^{-1}(\{1\}).$$

Montrez qu'ils forment une partition de A .

On note $\leq$ l'ordre alphabétique défini sur A et

$$\theta : A \rightarrow \llbracket 0, 25 \rrbracket$$

l'application qui associe à une lettre x sa position $\theta(x)$ dans l'ordre alphabétique, c'est-à-dire

$$\theta(a) = 0, \theta(b) = 1, \dots, \theta(z) = 25.$$

Soit

$$H : A^2 \rightarrow A$$

l'application définie par

$$H(k, \ell) = \theta^{-1}((\theta(k) + \theta(\ell)) \bmod 26),$$

où $a \bmod b$ désigne le reste de la division euclidienne de a par b .

3. Calculez $H(a, b)$ et $H(b, e)$.
4. La fonction H est-elle injective, surjective, bijective ?
5. Écrivez une fonction Python **Hacher** à deux paramètres de type **char** qui calcule la fonction H . (*Vous pourrez utiliser les fonctions `ord()` et `chr()` qui respectivement transforme une lettre en son code UNICODE et réciproquement.*)
6. On considère la relation binaire $\mathcal{R}$ définie sur A^2 par

$$(k, \ell) \mathcal{R} (k', \ell') \iff (k \leq k') \wedge (\ell \leq \ell').$$

Montrez que $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre.

7. La relation d'ordre $\mathcal{R}$ est-elle totale ou partielle ?
8. On considère la relation binaire $\mathcal{S}$ définie sur A^2 par

$$(k, \ell) \mathcal{S} (k', \ell') \iff (V(k) = V(k')) \wedge (V(\ell) = V(\ell')).$$

Montrez que $\mathcal{S}$ est une relation d'équivalence.

9. Quelles sont les différentes classes d'équivalence de $\mathcal{S}$?